

Forkurs i matematikk

Eksamen

12. juni 2025

Løsningsforslag

Christian F. Heide

12. juni 2025

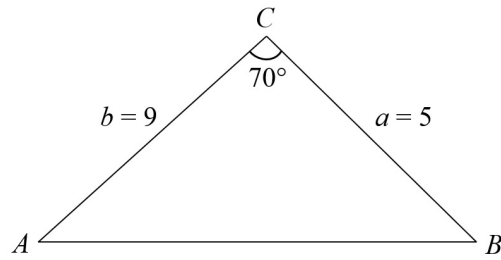
OPPGAVE 1

I en trekant ABC er følgende gitt:

$AC = 9, BC = 5, C = 70^\circ$.

a) Finn arealet av trekanten.

Det er alltid lurt å tegne en hjelpefigur først::



Vi ser her at vi kjenner to sider og deres mellomliggende vinkel. Vi kan derfor finne arealet ved arealformelen:

$$T = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 \cdot \sin 70^\circ = \underline{\underline{21.1}}$$

b) Finn vinklene A og B.

For å finne disse, må vi først finne sidekant c . Den finner vi trolig enklest ved å bruke cosinussetningen, altså

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = \\ 5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos 70^\circ &= 25 + 81 - 30,7818 = 75,2182 \\ c &= \sqrt{75,2182} = 8,6728 \end{aligned}$$

Da kan vi finne vinkel A både ved hjelp av sinussetningen, cosinussetningen og arealsetningen. Jeg velger sinussetningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

Vi multipliserer begge sider med a , og får

$$\sin A = \frac{\sin C}{c} \cdot a$$

Vi setter inn tall, og får

$$\sin A = \frac{\sin 70^\circ}{8,6728} \cdot 5 = 0,5417$$

$$A = \sin^{-1} 0,5417 = \underline{\underline{32,8^\circ}}$$

Kan supplementvinkelen også være en løsning her? Supplementvinkelen er $180^\circ - 32,8^\circ = 147,2^\circ$. Vi ser at dette ikke kan være en mulig verdi for vinkel A , fordi vinkelsummen i en trekant er 180° og $C = 70^\circ$. Da vil vinkel A og C til sammen være mer enn 180° . Derfor kan vi utelukke supplementvinkelen som en mulighet i dette tilfellet.

Den enkleste måten å finne vinkel B på nå, er å benytte at vinkelsummen i en trekant er 180° . Da finner vi

$$B = 180^\circ - 70^\circ - 32,8^\circ = \underline{\underline{77,2^\circ}}$$

OPPGAVE 2

a) Løs følgende ulikhet ved regning:

$$\frac{2x-1}{x-3} < 1$$

Vi flytter 1-eren over på venstre side:

$$\frac{2x-1}{x-3} - 1 < 0$$

Så finner vi felles nevner slik at vi kan sette på felles brøkstrek:

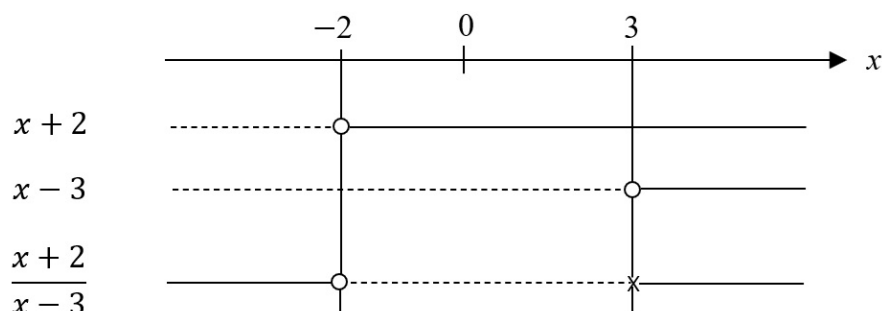
$$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} < 0$$

$$\frac{2x-1-(x-3)}{x-3} < 0$$

$$\frac{2x-1-x+3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x+2}{x-3} < 0$$

Vi kan nå tegne fortegnsskjema for brøken, og på den måten finne ut hvor den er mindre enn 0 (altså negativ):



Vi ser at brøken er mindre enn 0 når x er mellom -2 og 3 . Løsningen er altså

$$\underline{\underline{-2 < x < 3}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$x + 2 = \sqrt{x + 14}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x + 2)^2 = (\sqrt{x + 14})^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x + 14$$

Så flytter jeg alt over på venstre side:

$$x^2 + 4x + 4 - x - 14 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Så bruker jeg abc-formelen for å finne løsningene av denne:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Til slutt må vi sjekke disse svarene ved å sette prøve.

$x = 2$:

VS: $2 + 2 = 4$

HS: $\sqrt{2 + 14} = \sqrt{16} = 4$

Vi ser at VS = HS, så dette er en løsning.

$x = -5$:

VS: $-5 + 2 = -3$

HS: $\sqrt{-5 + 14} = \sqrt{9} = 3$

Vi ser at VS $\neq$ HS. Dette er derfor en falsk løsning.

Følgelig er løsningen av den irrasjonale ligningen:

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

c) Løs følgende ligning ved regning:

$$2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 2 + 2 \sin x \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

Siden dette er en annengradslikning, starter vi med å flytte alt over på venstre side:

$$2 \sin^2 x + \sin x + 1 - 2 - 2 \sin x = 0$$

Så trekker vi sammen det vi kan:

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Så bruker vi abc-formelen:

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\sin x = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\sin x = 1$ gir følgende vinkler (den andre vinkelen er supplementvinkelen til den første):

$$x = \sin^{-1} 1 = 90^\circ \quad \vee \quad x = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Her ser vi at supplementvinkelen er lik den første vinkelen vi fant, siden 90° er sin egen supplementvinkel.

$\sin x = -\frac{1}{2}$ gir følgende vinkler:

$$x = \sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -30^\circ \quad \vee \quad x = 180^\circ - (-30^\circ) = 210^\circ$$

Men merk at -30° ikke ligger i første omløp, så vi må «flytte» den dit ved å legge på ett helt omløp (altså 360°), og vi får da $x = -30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$.

Alle løsningene til ligningen, skrevet i stigende rekkefølge, er følgende

$$\underline{\underline{x = 90^\circ \quad \vee \quad x = 210^\circ \quad \vee \quad x = 330^\circ}}$$

OPPGAVE 3

På en videregående skole var det 179 elever som tok eksamen i både norsk hovedmål og sidemål. 14 av disse 179 strøk i norsk hovedmål, mens 21 strøk i norsk sidemål. 7 av elevene strøk i både hovedmål og sidemål.

Vi trekker tilfeldig én av de 179 elevene.

Vi definerer følgende hendelser:

H: Den uttrukne eleven strøk i norsk hovedmål.

S: Den uttrukne eleven strøk i norsk sidemål.

a) Hva er sannsynligheten for at den uttrukne eleven strøk i norsk hovedmål?

Siden alle elever har samme sannsynlighet for å bli trukket ut, har vi en uniform sannsynlighetsfordeling. Vi kan da regne sannsynlighet ved å ta antall gunstige og dele på antall mulige. Her får vi

$$P(H) = \frac{14}{179} = \underline{\underline{0,078}}$$

b) Forklar hva hendelsen $H \cup S$ betyr, og finn sannsynligheten for denne hendelsen.

Hendelsen $H \cup S$ er at den uttrukne eleven har strøket i hovedmål eller sidemål eller begge deler, altså at den uttrukne har strøket på minst én av de to eksamenene.

Denne er gitt ved

$$P(H \cup S) = P(H) + P(S) - P(H \cap S)$$

$P(H)$ fant vi i spørsmål a. Vi finner så

$$P(S) = \frac{21}{179} = 0,117$$

$$P(H \cap S) = \frac{7}{179} = 0,039$$

Da er

$$P(H \cup S) = \frac{14}{179} + \frac{21}{179} - \frac{7}{179} = \frac{28}{179} \approx 0,156$$

c) Forklar hva hendelsen $S|H$ betyr, og finn sannsynligheten for denne hendelsen.

$S|H$ er hendelsen at den uttrukne eleven strøk i sidemål gitt at vedkommende strøk i hovedmål. Dette kan tenkes som sannsynligheten for at en uttrukket elev strøk i sidemål dersom vi trekker kun fra gruppen av elever som strøk i hovedmål. Dette er gitt ved

$$P(S|H) = \frac{P(S \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{7}{179}}{\frac{14}{179}} = \frac{7}{14} = \underline{\underline{0,5}}$$

OPPGAVE 4

a) Løs følgende ligning ved regning:

$$e^{4x} = 100$$

Vi tar først den naturlige logaritmen på begge sider:

$$\ln e^{4x} = \ln 100$$

På venstre side kan vi bruke regelen $\ln a^b = b \cdot \ln a$, og får

$$4x \cdot \ln e = \ln 100$$

Så vet vi at $\ln e = 1$, slik at dette blir

$$4x = \ln 100$$

Vi deler til slutt på 4 på begge sider, og får

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln 100}{4} \approx 1,15}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$3 \log x = 6$$

(«log» er det samme som i boka kalles «lg», altså logaritmen med grunntall 10.)

Vi deler først med 3 på begge sider, og får

$$\log x = 2$$

Vi blir kvitt logaritmen ved følgende operasjon:

$$10^{\log x} = 10^2$$

som gir

$$\underline{\underline{x = 100}}$$

c) Trekk sammen følgende:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$$

Her bruker vi regelen $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Her får vi da

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{2+3}{4}} = \underline{\underline{a^{\frac{5}{4}}}}$$

OPPGAVE 5

Gitt vektorene $\vec{u} = [5, 1]$ og $\vec{v} = [-1, -2]$.

a) Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [5, 1] \cdot [-1, -2] = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = -5 - 2 = \underline{\underline{-7}}$$

b) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Her kan vi bruke skalarproduktet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Løser vi dette uttrykket med hensyn på $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, får vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Skalarproduktet fant vi i spørsmål b at var $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$, så vi trenger nå å finne lengdene av vektorene. Dette gjør vi slik:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = [5, 1] \cdot [5, 1] = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26$$

Vi vet at

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

så da får vi

$$|\vec{u}| = \sqrt{26}$$

På samme måte finner vi

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = [-1, -2] \cdot [-1, -2] = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

som gir

$$|\vec{v}| = \sqrt{5}$$

Vi får derfor

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}} = -0,6139$$

som gir

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}(-0,6139) = \underline{\underline{127,9^\circ}}$$

En linje l er gitt ved følgende likningsframstilling:

$$y = -4x + 5$$

c) Finn en parameterframstilling for linjen l .

For å finne en parameterframstilling for en linje, trenger vi et punkt på linjen og en retningsvektor for linjen.

Vi finner først et punkt på linjen:

$x = 0$ gir $y = -4 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$. Følgelig er $(0, 5)$ et punkt på linjen.

En retningsvektor finner vi enklest slik:

Dersom vi lar førstekoordinaten (x -koordinaten) til retningsvektoren være 1, vil andrekoordinaten (y -koordinaten) være stigningstallet til linjen. Her ser vi av likningsframstillingen at stigningstallet (tallet foran x), er -4 . En retningsvektor for linjen er følgelig $\vec{r} = [1, -4]$.

Da kan vi skrive opp parameterframstillingen for linjen l :

$$\underline{\underline{x = t \quad \wedge \quad y = -4t + 5}}$$

OPPGAVE 6

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 9$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter for funksjonen $f(x)$ ved regning.

For å finne ekstremalpunkter (topp- og bunnpunkter) ved regning, deriverer vi funksjonen:

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} - 24 = 3x^2 - 6x - 24$$

Vi må så faktorisere dette uttrykket:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$

Vi kan få mindre tall i utregningen ved først å dele hele uttrykket på 3 (men dette er ikke viktig for løsningen). Men jeg deler med 3, og får

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

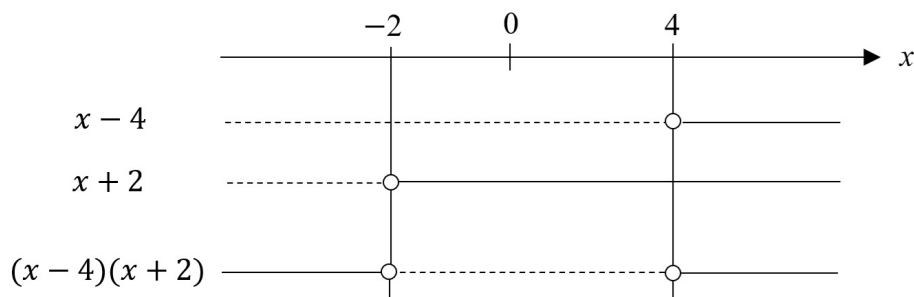
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \vee \quad x = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dette betyr at vi kan faktorisere uttrykket slik:

$$3x^2 - 6x - 24 = 3(x-4)(x+2)$$

Vi kan da bruke et fortegnsskjema for å studere fortegnet til den deriverte. (Faktoren 3 vil være positiv for alle x , og vil derfor ikke påvirke fortegnet til uttrykket. Vi trenger derfor ikke å ta med denne faktoren når vi studerer fortegnet til $f'(x)$, men det blir heller ikke feil om vi tar den med.) Fortegnsskjemaet blir slik:



Vi ser at den deriverte er positiv for x -verdier mindre enn -2 . Det betyr at grafen er voksende i dette området. Når $x = -2$ er den deriverte 0, for deretter å bli negativ. Det betyr at grafen når et toppunkt for $x = -2$ for deretter å avta. Den avtar helt til $x = 4$, hvor den når et minimum, for deretter å stige igjen, siden den deriverte er positiv for $x > 4$. Vi har følgelig et minimum for $x = 4$ og et maksimum for $x = -2$. Funksjonsverdiene i disse punktene er

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 9 = -71$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) + 9 = 37$$

Oppsummert:

Funksjonen har toppunkt i $(-2, 37)$ og bunnpunkt i $(4, -71)$.

b) Bestem eventuelle vendepunkter for funksjonen $f(x)$ ved regning.

Vendepunkter finner vi ved å se hvor den andrederiverte bytter fortegn. Vi finner først den andrederiverte:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Siden dette er en rett linje, vil den bytte fortegn i sitt nullpunkt. Vi finner derfor hvor denne er 0:

$$6x - 6 = 0$$

$$6x = 6$$

Vi deler på begge sider med 6, og finner

$$x = 1$$

Vi ser av dette at $f''(1) = 0$. Følgelig vil den bytte fortegn for $x = 1$ og dette vil derfor være funksjonens vendepunkt. Funksjonsverdien i dette punktet er

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 9 = 1 - 3 - 24 + 9 = -17$$

Funksjonen har vendepunkt i $(1, -17)$.

OPPGAVE 7

I disse oppgavene må du vise hvordan du regner ut den deriverte og den integrerte. Å finne svarene på kalkulatoren gir ingen poeng.

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

Finn $f'(x)$.

Her må vi bruke kjerneregelen med $u = 2x + 1$ som kjerne, og $\ln u$ som ytre funksjon.

Den deriverte av kjernen er $u' = 2$. Videre har vi derivasjonsregelen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Vi finner da

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = \frac{3x+2}{x^2}$$

Finn $g'(x)$.

Her kan vi bruke regelen for å derivere en brøk, som sier

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

I vårt tilfelle er $u = 3x + 2$ og $v = x^2$. Da er $u' = 3$ og $v' = 2x$. Vi får derfor

$$g'(x) = \frac{3 \cdot x^2 - (3x+2) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^2 - 6x^2 - 4x}{x^4} =$$

$$\frac{-3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x \cdot (-3x - 4)}{x \cdot x^3} =$$

$$\underline{\underline{-\frac{3x+4}{x^3}}}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_1^3 (x^3 - 2x) \, dx$$

$$\int_1^3 (x^3 - 2x) \, dx = \left[\frac{1}{3+1} x^{3+1} - 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} \right]_1^3 =$$

$$\left[\frac{1}{4} x^4 - x^2 \right]_1^3 =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 3^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^2 \right) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 81 - 9 - \frac{1}{4} + 1 =$$

$$\frac{81}{4} - \frac{36}{4} - \frac{1}{4} + \frac{4}{4} =$$

$$\frac{81 - 36 - 1 + 4}{4} = \frac{48}{4}$$

$$\underline{\underline{12}}$$